

Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023-2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 5 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

- иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;
- выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;
- пользоваться справочными материалами;
- разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

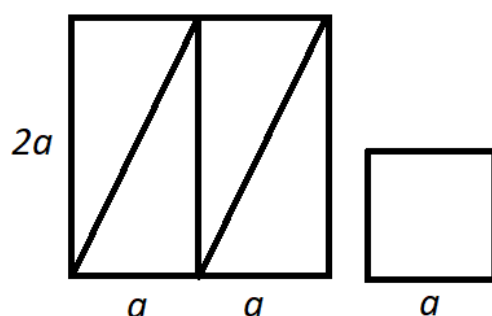
Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

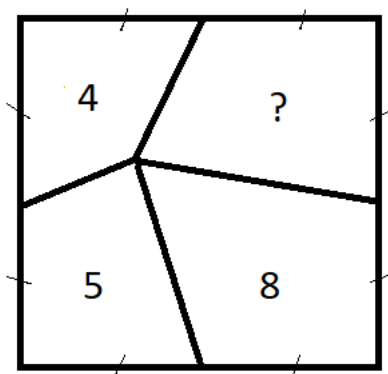
8 класс

1. Даны квадраты, один из которых разделен на четыре треугольника (см. рис.).

Из этих треугольников и маленького квадрата сложите один большой квадрат.



2. Ньургун написал на языке PYTHON программу, которая для любого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) находит произведение его цифр, увеличенных на 1. Какое наименьшее четырехзначное число ввел Ньургун, если программа получила ответ 45?
3. Внутри квадрата выбрана произвольная точка, которая соединена с серединами сторон (см. рис.). Площади полученных трех четырехугольников равны 4, 5 и 8. Найдите площадь последнего четырехугольника.



4. Рождественские эльфы кладут подарки в мешочки. Сначала они положили их по 8 штук в каждый мешочек, потом по 9 и затем по 10. И каждый раз оставался один подарок. Тогда эльфы решили положить по 11 подарков и тогда лишних не осталось. Сколько подарков они разложили по мешочкам, если известно, что подарков было не более 2024?
5. В некоторой деревне живут только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, при этом внешне они никак не отличаются. Каждый год 1 сентября в деревне проходит фестиваль урожая, и все жители в этот день одевают либо зелёные, либо синие, либо красные шапочки. Однажды 2 сентября проходил опрос и каждому из жителей задали четыре вопроса.
1. «Ты вчера носил зелёную шапочку?»

2. «Ты вчера носил синюю шапочку?»»

3. «Ты вчера носил красную шапочку?»»

4. «На предыдущие вопросы ты отвечал честно?»»

На первый вопрос «да» ответили 40 жителей, на второй — 50, на третий — 70, а на четвёртый — 100. Сколько рыцарей живет в деревне?

Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 7 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

- иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;
- выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;
- пользоваться справочными материалами;
- разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

10 класс

1. Найдите сумму всех целых чисел от 1 до 250 включительно, кратных либо 29, либо 35.

2. Есть три человека A , B и C , один из них — рыцарь (который всегда говорит правду), один — лжец (который всегда лжет), а третий — шпион (который может либо лгать, либо говорить правду).

A говорит: « B или C — шпион».

B ничего не сказал, так как ранее он сильно прикусил язык.

C говорит: « A или B — рыцарь».

Определите кто из A , B , C является лжецом.

3. В вершинах шестиугольника расставили числа 1, 2, 3, 4, 5, 5 (пятерка встречается дважды). Затем каждому ребру шестиугольника приписали число, равное произведению чисел на его концах. Найдите наибольшую возможную сумму чисел на всех ребрах.

4. В правильном тетраэдре $SABC$, SH — высота $\triangle SBC$, S' — проекция точки S на плоскость ABC . На стороне AB выбрана точка K такая, что угол $S'HK$ равен 60° . Найдите отношение объёмов $\frac{V_{SS'HK}}{V_{SABC}}$.

5. Решите в натуральных числах

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$$

6. Докажите, что для любых $c, x > 0$ выполняется неравенство

$$2x^3 + 2c^3 \geq 3cx^2$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = 4, \\ y^3 - z^2 = 4, \\ z^3 - x^2 = 4. \end{cases}$$

Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 7 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

- иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;
- выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;
- пользоваться справочными материалами;
- разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

11 класс

1. Упорядочите числа по убыванию (от большего к меньшему):
 $333^3, 33^{33}, 3^{333}, 33^{3^3}, 3^{33^3}, 3^{3^{33}}, 3^{3^{3^3}}$.
2. Есть три человека A , B и C , один из них — рыцарь (который всегда говорит правду), один — лжец (который всегда лжет), а третий — шпион (который может либо лгать, либо говорить правду).

А говорит: «В — шпион».

В говорит: «А солгал».

С говорит: «В солгал».

Выясните кто из них шпион.

3. Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$. Найдите $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$.

4. Докажите, что данное уравнение разрешимо в натуральных числах для любого натурального n

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = n.$$

5. При $x \in [0; 100]$ найдите количество различных целых значений функции

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{2}\right] + [3x] + [4x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

6. Имеется куб $3 \times 3 \times 3$. В каждую ячейку куба можно поместить по одному магическому кролику. Волшебник Эрлих поймал 16 магических кроликов из которых было 3 черных, 8 красных и 5 белых. Сколькими способами он может рассадить в ячейки куба кроликов, с точностью до поворотов и отражений? (То есть считаем, что две рассадки одинаковы если существует отражение, повороты или их композиция приводящие друг к другу).

7. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . На отрезке CH как на основании построили два правильных треугольника ECH и FCH , притом точки E и A лежат по одну сторону, а точки F и B — по другую сторону относительно прямой CH . Точка G является пересечением прямых AF и CE . Докажите, что $AG \cdot BC = BG \cdot AC$.

Северо-Восточная олимпиада школьников по математике
Заключительный этап, 2023-2024 учебный год

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

Олимпиадная работа заключительного этапа состоит из 5 задач по математике. Все задания предполагают развернутый ответ.

На выполнение олимпиадной работы по математике отводится 3 часа (180 минут). Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Все вычисления проводятся вручную. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик.

Каждое задание оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются.

Участникам запрещается:

- иметь при себе письменные заметки, средства связи, электронно-вычислительную технику; калькулятор;
- выносить из аудитории черновики, олимпиадные задания на бумажном или электронном носителях, фотографировать олимпиадные задания;
- пользоваться справочными материалами;
- разговаривать, пересаживаться, обмениваться любыми материалами и предметами.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов был пронумерован в соответствии с номером задания.

Все бланки заполняются ручкой с синими или чёрными чернилами. Допускается использование гелевой ручки. Запрещается использование простого карандаша, корректора. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в бланках олимпиадных заданий не учитываются при оценивании работы. Пишите аккуратно, разборчивым почерком.

Желаем успеха!

9 класс

1. Многодетная мама каждый второй день вытирает пыль в квартире, каждый третий день делает влажную уборку и каждый пятый день стирает. Сегодня, 1 января, у мамы тяжёлый день: она должна делать все эти три дела. Когда у мамы будет следующий тяжёлый день?

2. Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй – за 8 минут. Найдите число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.
3. Житель Крайнего Севера на оленьей упряжке повез свежемороженую рыбу и юколу (сушено-вяленую рыбу) для торговли на ярмарке. На одной оленьей упряжке можно поместить 180 кг свежемороженой рыбы или 30 кг юколы, но можно увезти на упряжи с нартой только 100 кг товара. Какова наибольшая выручка от продажи, если килограмм свежемороженой рыбы стоит 1000 руб, а килограмм юколы – 3500 руб?
4. В мешке 10 шариков. Несколько красных, все остальные синие. Айсен сказал: «В мешке не меньше пяти красных шариков». Айтал ему ответил: «Ты не прав». И добавил: «В мешке не меньше трех синих шарика». Айаана же сказала: «Красных шариков чётное число». Оказалось, что из четырёх высказываний только одно верное. Сколько красных шариков в мешке?
5. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 30, AB = 28, BC = 5$. На стороне AB отмечена точка P , равноудаленная от прямых AC и BC . Найдите длину AP .